

---

# LE COURANT DE GRAVITÉ EN RÉGIME VISQUEUX

---

A PREPRINT

Thibault Villard, Ferdinand Peyrin, Bruno Deremble\*

Département de Mécanique, École Polytechnique, 91120 Palaiseau  
thibault.villard@polytechnique.edu, ferdinand.peyrin@polytechnique.edu,  
bruno.deremble@polytechnique.edu

Les courants de gravité, produits par une différence de densité entre deux masses fluides, sont souvent observés dans l’atmosphère, les océans et les processus géologiques. Cet article se focalise sur l’écoulement de la lave, où les forces visqueuses jouent un rôle prépondérant. Notre étude montre que le front progresse selon une loi de puissance  $t^{1/5}$ . Cette évolution lente permet de ne pas prendre en compte les variations de vitesse, instaurant ainsi un équilibre entre les forces de pression et la viscosité. En appliquant cette simplification, une solution auto-similaire est déterminée, permettant de décrire la forme du front dans l’espace et dans le temps.

## INTRODUCTION

Un courant de gravité est l’écoulement d’un fluide (air, eau, lave, etc.) qui est entraîné par la force de gravité. Il se produit lorsqu’il y a une différence de densité entre deux masses fluides adjacentes. Ainsi, lors d’une éruption volcanique, la lave, plus dense que l’air environnant, s’écoule sous l’influence de la gravité (même sur un terrain plat). C’est ce type d’écoulement qui nous intéresse ici et plus précisément l’effet de la viscosité sur l’écoulement. Cependant, avant de s’intéresser à l’effet de la viscosité, il est important de faire quelques rappels sur les courants de gravité en général. Ces courants ont été beaucoup étudiés, avec des expériences en laboratoire ainsi qu’avec des modèles théoriques et numériques [1, 2]. Nous reprenons ici les principaux régimes d’écoulement. Dans tous les exemples mentionnés ci-dessus, le courant de gravité peut se modéliser de manière idéalisée de la manière suivante : deux fluides de densité différentes  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont placés côte à côte comme illustré sur la figure 1.

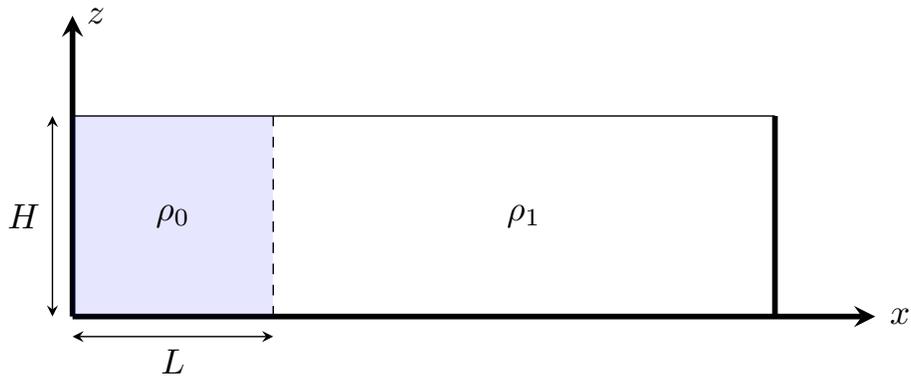


Figure 1: Configuration idéalisée de l’état initial du courant de gravité : deux fluides de densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont placés côte à côte. La hauteur initiale du fluide actif est  $H$  et son extension latérale est  $L$ .

Dans chaque fluide, la pression est donnée par l’équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (1)$$

---

\*Également chercheur à l’Institut des géosciences de l’environnement, Université Grenoble Alpes

avec  $P$  la pression hydrostatique,  $z$  la coordonnée verticale,  $g$  la gravité, et  $\rho$  la densité du fluide. En intégrant cette équation depuis la surface ( $z = 0$ ) où la pression est  $P_0$ , on obtient

$$P(z) = P_0 - \rho g z. \quad (2)$$

Ainsi, de part et d'autre de l'interface qui sépare les deux fluides on observe une variation de pression  $\Delta P = \Delta \rho g z$ . C'est cette différence de pression qui est responsable de la mise en mouvement du fluide. Nous décrivons ici la dynamique du fluide de densité  $\rho_0$  en supposant qu'il s'écoule dans un fluide inerte de densité  $\rho_1$ . Dans la suite, nous parlons simplement de l'évolution du fluide de densité  $\rho_0$ .

Le premier régime d'écoulement est une phase d'accélération pendant laquelle le fluide voit son énergie potentielle de pesanteur convertie en énergie cinétique. Le deuxième régime est un régime inertiel qui correspond à un mouvement à vitesse constante dont une des caractéristiques principales est la conservation de l'énergie [3]. Or le courant ne peut pas se propager jusqu'à l'infini à vitesse constante : la friction avec une interface et/ou la viscosité du fluide vont à un moment devenir des facteurs importants qui vont impliquer un ralentissement de l'écoulement [4]. C'est cette phase de ralentissement que nous voulons étudier dans cet article <sup>2</sup>.

Nous nous sommes posés la question : comment évolue la vitesse d'un courant de gravité dans le régime visqueux? Même si la question est bien connue de la communauté scientifique, en particulier depuis [5], nous allons y répondre en mettant en place deux expériences, une expérience de laboratoire et une expérience simple, réalisable à la maison. Nous allons ensuite montrer que l'on peut expliquer le régime visqueux à l'aide d'arguments simples qui nous conduisent à expliquer l'évolution des vitesses comme une loi d'échelle. Enfin nous détaillerons le fait que cet écoulement entre dans la classe des écoulements auto-similaires.

## 1 EXPÉRIENCES DU COURANT DE GRAVITÉ

### 1.1 Expérience en laboratoire

L'expérience en laboratoire a pour but d'étudier la dynamique d'un courant de gravité en régime visqueux. Notre objectif principal a été de déterminer l'influence de la viscosité dans l'écoulement et nous avons alors fixé tous les paramètres et fait varier la viscosité. Pour cela nous avons utilisé une cuve en verre de dimensions longueur  $\times$  hauteur  $\times$  profondeur = 99 cm  $\times$  8 cm  $\times$  5 cm. La cuve est remplie d'un mélange eau/glycérine dont nous précisons le ratio ci-après. Nous avons séparé cette cuve en deux espaces à l'aide d'une barrière que nous retirons au début de chaque expérience. Le premier compartiment, qui correspond au fluide actif et qui est à gauche sur la figure 1, avait pour longueur 15 cm. Dans ce premier espace, nous avons alors ajouté du sel afin d'obtenir une différence de densité entre les deux volumes, moteur du phénomène. Cette différence a été choisie constante égale à 30 g l<sup>-1</sup>.

Nous avons ainsi pu réaliser plusieurs expériences en contrôlant précisément la viscosité du fluide. Pour faire varier la viscosité, nous avons réalisé des mélanges glycérine/eau. À partir des travaux de [6], nous avons une bonne connaissance de la viscosité cinématique du mélange<sup>3</sup>. Afin de visualiser la dynamique, nous avons rajouté au fluide actif quelques gouttes de fluorescéine et la cuve était éclairée par des lampes UV. L'expérience débute à l'instant où nous retirons la barrière entre les deux fluides. Nous avons enregistré le déroulé de chaque expérience avec une caméra, voir figure 2, avant d'exploiter les données obtenues.

Afin d'avoir une évolution quantitative de la position du front, nous avons traité les images en les binarisant sur ImageJ, puis en mesurant la proportions de pixels noirs et de pixels blancs sur une ligne proche du fond de la cuve. En utilisant cette proportion et la longueur totale de la cuve, on obtient la position du front. Ces points sont reportés sur la figure 3. Sur cette figure, on observe un premier régime qui correspond à celui que l'on peut observer dans un fluide non visqueux, à savoir que le déplacement dépend linéairement du temps (droite de pente 1 dans un espace log-log). Le fluide est donc au départ dans un régime inertiel.

Après ce régime, un ralentissement est visible avant que la vitesse se stabilise dans un nouveau régime, visqueux cette fois-ci, cf. la droite discontinue figure 3. Une fois ce régime mis en place, le déplacement suit une loi de puissance  $x(t) \propto t^{\frac{1}{5}}$ . L'écoulement reste dans ce régime jusqu'à ce que le fluide arrive au bout de la cuve.

La viscosité influe beaucoup sur la vitesse de mise en place du régime visqueux. Ainsi pour un fluide constitué à 100 % de glycérine on a une viscosité cinématique  $\nu = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (soit 1000 fois la viscosité cinématique

<sup>2</sup>On note qu'il existe un régime d'écoulement dit régime d'étalement qui vient parfois s'intercaler entre le régime inertiel et le régime visqueux et dont les caractéristiques principales sont la conservation de la flottabilité et un étalement à nombre de Froude constant. Nous n'étudierons pas ce régime ici.

<sup>3</sup>Voir aussi [https://www.met.reading.ac.uk/~sws04cdw/viscosity\\_calc.html](https://www.met.reading.ac.uk/~sws04cdw/viscosity_calc.html)



Figure 2: Chronophotographie de l'expérience. Le système est en blanc.

de l'eau) et le régime s'établit en 70 s. Tandis que pour un mélange avec 75 % de glycérine, on a une viscosité  $\nu = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (soit 50 fois la viscosité cinématique de l'eau) et le régime visqueux s'établit en 150 s.

Nous avons en particulier pu observer que la mise en place de ce nouveau régime était fortement lié au nombre de Reynolds  $Re = \frac{Uh}{\nu}$ , avec  $U$  la vitesse caractéristique,  $h$  la hauteur du front, et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. En fin de parcours, pour le mélange avec 75 % de glycérine (donc de viscosité  $\nu = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ), nous obtenons  $Re = \frac{7.4 \times 10^{-4} \times 0.08}{5 \times 10^{-5}} = 1.4$  ce qui caractérise bien un écoulement visqueux. À l'inverse, en fin de parcours, pour le mélange avec 55 % de glycérine (donc de viscosité  $\nu = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ),  $Re = 140$  ce qui correspond sans doute à un régime intermédiaire entre le régime visqueux et le régime inertiel.

Nous obtenons la figure 3, très similaire à la figure 12 de de l'article de J.W. Rottman et J.E. Simpson [7]. Avant de proposer une théorie pour l'évolution du front en  $t^{1/5}$  dans le régime visqueux, nous allons décrire une autre expérience réalisée en complément de l'expérience en laboratoire.

## 1.2 Expérience simple

Nous proposons ici un dispositif facile à réaliser qui pourra être mis en place pour des étudiants ou pour des expériences de démonstration. Nous avons rassemblé le matériel nécessaire à la réalisation de cette expérience sur la figure 4: nous avons besoin d'un tube de plexiglas d'environ 1 m de long et de diamètre interne de 3 cm (ces mesures peuvent être adaptées en fonction du matériel disponible, il est néanmoins nécessaire de garder un petit rapport d'aspect diamètre/longueur). Pour le fluide actif, nous avons utilisé du miel liquide. La viscosité exacte du miel utilisé est inconnue mais l'ordre de grandeur est de 1-10 Pa s soit une viscosité cinématique  $\nu_{\text{miel}} = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Notons ici que cette viscosité du miel est proche de celle que nous avons obtenu en laboratoire dans un liquide uniquement constitué de glycérine (avec la différence notable que l'écoulement du miel a lieu dans l'air alors que l'écoulement de glycérine était dans la glycérine).

Comme on va le mesurer ci-après, on va observer des vitesses de l'ordre de  $10\text{-}100 \mu\text{m s}^{-1}$ . Avec une épaisseur du front de l'ordre du millimètre, on obtient alors un nombre de Reynolds de l'ordre de  $Re = 10^{-5}$ . On vérifie donc bien que l'on est dans un régime à bas Reynolds.

La première étape est de préparer une surface plate (avec un niveau à bulle) sur laquelle on va poser le tube rempli de miel à côté du mètre ruban. Après avoir bouché le tube d'un côté, on le remplit avec environ 3.5 cm de miel (100 ml) puis on le maintient à la verticale quelques minutes pour que le miel soit entièrement en bas du tube. On démarre le chronomètre au moment où on couche le tube horizontalement, aligné avec le mètre ruban. On peut suivre l'évolution du front en prenant des photos du dispositif. On note qu'il est pratique de placer le chronomètre dans le champ de

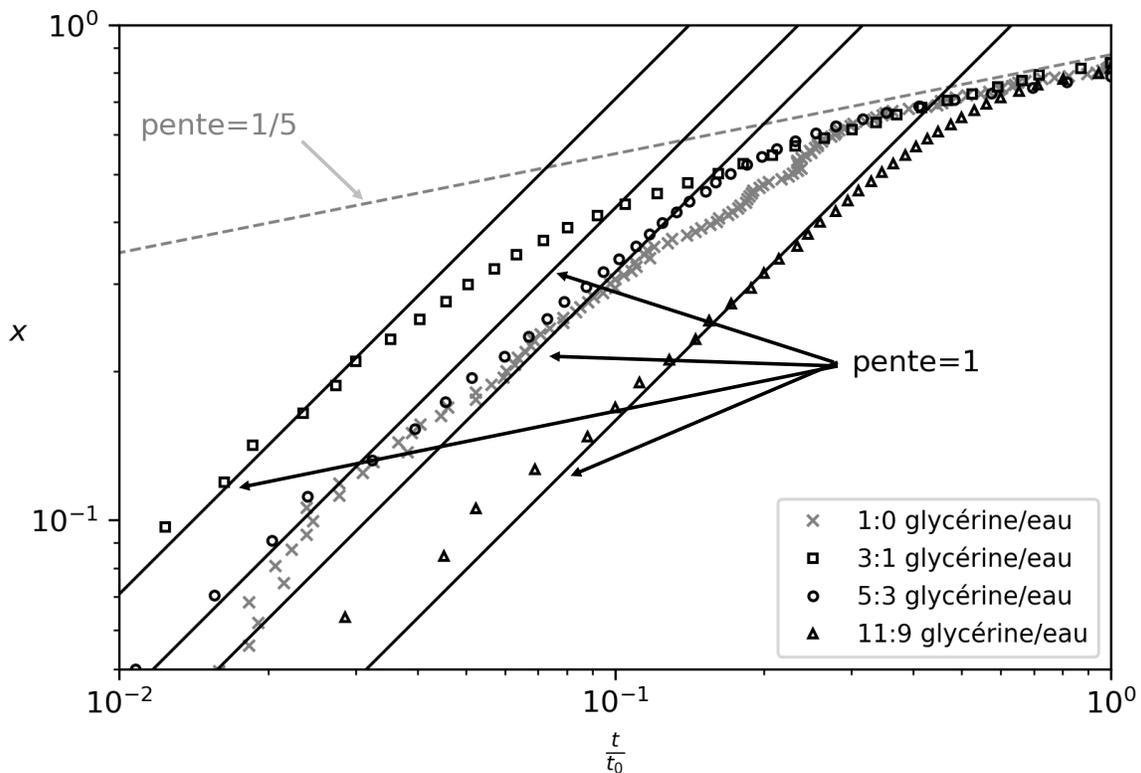


Figure 3: Résultats expérimentaux combinés pour différents mélanges eau/glycérine. L'expérience avec le mélange 1:0 glycérine/eau ayant été beaucoup plus lente et le système n'atteignant pas le bout de la cuve en un temps raisonnable, sa courbe (en gris) a été mise à l'échelle par l'opération  $x = x(1 + \frac{0.7}{x_f})$  (le choix de 0.7 correspond aux 0.7 m de parcours pendant lequel le régime final est déjà établi). Les Reynolds en fin de parcours étaient :  $Re = 10^{-2}$  pour le mélange 1:0,  $Re = 1$  pour le mélange 3:1,  $Re = 8$  pour le mélange 5:3 et  $Re = 50$  pour le mélange 11:9.

la caméra pour faciliter l'analyse. Comme on s'attend à avoir une vitesse qui ralentit dans le temps, il est possible d'espacer de plus en plus dans le temps les photos.

Les mesures de la position du front de miel en fonction du temps sont tracées sur la figure 5. On note que dans les premiers instants, la position évolue en une loi du type  $t^{1/3}$  qui correspond à un régime d'étalement que l'on ne décrit pas dans cet article. Vers la fin de l'expérience, la position évolue en une loi  $t^{1/5}$  que l'on décrit plus précisément dans la partie ci-après. Il faut tout de même noter que cette expérience est un peu longue : si le régime visqueux est effectivement en  $t^{1/5}$ , alors pour voir une variation d'un ordre de grandeur de la position du front (par exemple de 10 cm à 1 m) alors il faut attendre un temps de l'ordre de  $10^5$  s soit un peu plus de 24 h. Cette constatation limite un peu l'intérêt de l'expérience si elle est faite dans un but de démonstration.

Pour obtenir un écoulement plus rapide, il est préférable de faire l'expérience avec plus de miel (15 cm). Dans ce cas, on reste dans le régime d'étalement avec une loi en  $t^{1/3}$  (soit une expérience d'un peu moins d'une heure). On pourra cependant bien visualiser l'écoulement qui est qualitativement le même quelle que soit la quantité de miel.



Figure 4: Matériel nécessaire pour l'expérience simple : un tube de plastique transparent, du miel, un chronomètre et un mètre ruban. Sur l'image, on voit la propagation du front qui se trouve à 20 cm du bout du tube, 4 min et 16 s après le début de l'expérience.

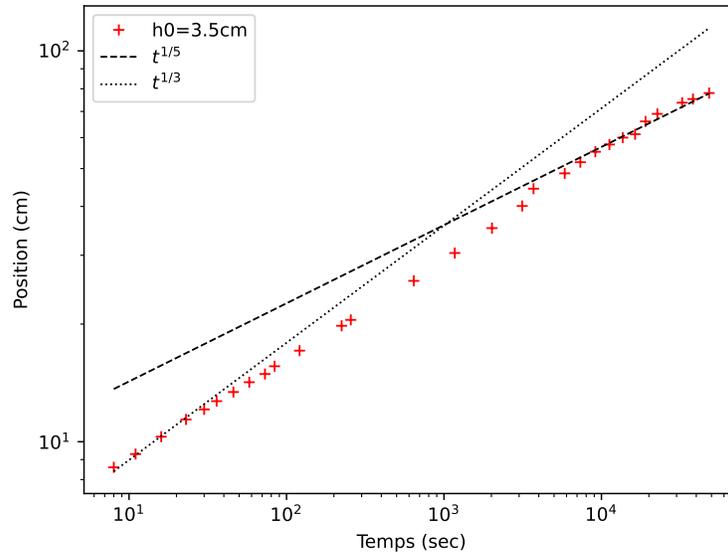


Figure 5: Évolution de la position du front de miel en fonction du temps. Les points expérimentaux sont tracés avec des croix, la courbe en pointillés correspond à la loi  $t^{1/5}$ . La loi en  $t^{1/3}$  correspond au régime d'étalement qui n'est pas décrit dans cet article.

## 2 APPROCHE THÉORIQUE

Pour décrire l'évolution du fluide, nous allons faire plusieurs approximations qui vont simplifier la résolution du problème. Ces approximations vont aussi nous aider à mieux comprendre la physique du problème:

- On suppose que le fluide s'écoule uniquement dans la direction  $x$  (toute la dynamique est donc invariante suivant la direction transverse  $y$ ).
- On suppose que le fluide est une couche mince donc avec un rapport d'aspect hauteur/longueur petit. On peut décrire le fluide avec les équations de Saint-Venant<sup>4</sup>. Cela revient aussi à dire qu'il existe uniquement deux variables dynamiques : la vitesse de l'écoulement  $u(x, t)$  et la hauteur du fluide  $h(x, t)$  et que ces deux variables sont indépendantes de la coordonnée  $z$ . Le gradient de pression dans le fluide s'exprime grâce à l'équilibre hydrostatique.
- On suppose que l'on est en régime visqueux, c'est à dire que le terme inertiel est négligeable devant le terme visqueux. Il existe donc un équilibre entre le gradient de pression et les forces de viscosité.
- On suppose enfin que pour les forces de viscosité, le gradient vertical des vitesses est beaucoup plus important que le gradient latéral. Le terme de viscosité qui s'écrit normalement comme  $\nu \partial^2 u / \partial z^2$  est paramétrisé ici en un terme de friction  $-\nu u / h^2$

Avec toutes ces hypothèses, l'équation d'évolution de la quantité de mouvement se simplifie en

<sup>4</sup>Aussi appelées équations en eau peu profonde ou *shallow water equations* en anglais.

$$0 = -g' \frac{\partial h}{\partial x} - \nu \frac{u}{h^2}. \quad (3)$$

Cette équation diagnostique est parfois appelée l'équation de lubrification (forme simplifiée des équations de Navier-Stokes dans l'hypothèse d'un film fluide mince, d'un faible nombre de Reynolds et d'un mouvement lent). Cette équation fait intervenir la gravité réduite  $g' = g\Delta\rho/\rho_0$  qui prend en compte la différence de densité entre le fluide et l'environnement (cf. l'explication sur la force de pression en introduction) et la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ .

La seconde équation utilisée pour décrire l'écoulement est l'équation d'incompressibilité (conservation de la masse) qui s'exprime avec nos hypothèses comme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\lambda}{4} \frac{\partial^2 h^4}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

avec  $\lambda = g'/\nu$ , un coefficient de dimension  $[\lambda] = L^{-1}T^{-1}$ . On note que cette équation aux dérivées partielles ressemble beaucoup à une équation de diffusion à un détail près : le terme dans la dérivée spatiale est à la puissance 4 (alors qu'il serait à la puissance 1 dans l'équation classique de la diffusion).

Malgré ces différences, on va pouvoir étudier cette équation avec les mêmes outils : nous allons dans un premier temps dériver une loi d'échelle basée sur des ordres de grandeur puis nous allons montrer qu'il existe une solution auto-similaire et discuter de l'importance de cette solution pour analyser la physique du problème.

## 2.1 Loi d'échelle

Pour proposer une solution de l'équation (5), nous allons encore simplifier le problème en proposant que le fluide s'écoule de manière auto-similaire (hypothèse que nous allons justifier dans la prochaine section) et que la forme de l'écoulement est un rectangle de hauteur  $H$  et de longueur  $L$  qui s'aplatit dans le temps, avec  $H$  et  $L$  deux fonctions du temps. Dans ce cadre, la conservation du volume s'écrit

$$HL = V_0, \quad (6)$$

avec  $V_0$  une constante. Pour établir une loi d'échelle on va de plus approximer les dérivées spatiales en  $\partial/\partial x \sim 1/L$  (sans se préoccuper du signe). On propose que la vitesse  $u$  s'écrit  $u \propto dL/dt$ . Ainsi, l'équation (5) peut alors se ré-écrire en

$$\frac{dL}{dt} = \lambda \frac{H^3}{L} = \lambda \frac{V_0^3}{L^4} \quad (7)$$

On obtient donc une solution de cette équation en

$$L \propto V_0^{3/5} \lambda^{1/5} t^{1/5}, \quad (8)$$

et où l'on a omis le préfacteur car il s'agit ici uniquement de donner un ordre de grandeur et non pas une équation exacte. Il est frappant de constater que malgré toutes les hypothèses simplificatrices, on retrouve une loi pour la position du front en  $t^{1/5}$  que l'on a observée expérimentalement. L'exposant  $1/5$  est petit devant 1, on retrouve donc le fait que l'écoulement évolue lentement et on justifie a posteriori le fait que l'on néglige le terme inertiel de l'équation de la quantité de mouvement. On obtient par ailleurs facilement une loi d'échelle pour la vitesse du front en dérivant l'équation précédente par rapport au temps pour trouver une loi en  $U \propto t^{-4/5}$ , qui suggère là encore une physique très différente de l'écoulement à vitesse constante qui est observé dans [3].

## 2.2 Dynamique auto-similaire

Bien que la loi d'échelle que nous venons d'obtenir nous donne des informations sur l'évolution du front, il nous manque la description de la forme du front. Pour cela, il nous faut résoudre l'équation aux dérivées partielles (5). Nous allons chercher une solution auto-similaire comme l'ont montré [5] puis [8] dans une géométrie axisymétrique. Pour illustrer le principe des solutions auto-similaires, on trace sur la figure 6 deux profils de hauteur de fluide à un instant  $t = t_0$  et  $t = t_1$ . Par définition, ces deux solutions sont auto-similaires si il existe un changement d'échelle qui permet de superposer les deux profils. Si l'on peut faire cette transformation, alors la forme du profil sera toujours la même, modulo un étirement des coordonnées. L'objectif de cette analyse revient donc à trouver cette transformation pour laquelle le profil reste inchangé. On suivra pour cela la méthode indiquée dans [9] que l'on reporte ici.

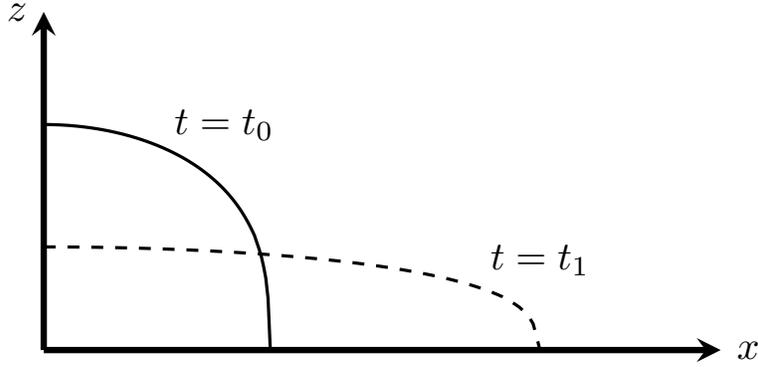


Figure 6: Exemple de profils auto similaires: les deux courbes correspondent aux profils de fronts à deux instants  $t_0$  (trait plein) et  $t_1$  (trait pointillé). Si on contracte l'échelle de l'axe des abscisses et dilate l'échelle de l'axe des ordonnées, alors la courbe en pointillées se superpose parfaitement à la courbe en trait plein: ces deux profils sont similaires.

Pour trouver cette transformation, nous allons supposer que nous connaissons une fonction  $h(x, t)$  solution de l'équation (5) et nous allons chercher une autre solution qui s'écrit sous la forme

$$h(x, t) = a\bar{h}(bx, ct) \quad (9)$$

avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des facteurs de contraction ou dilatation que l'on cherche à établir pour que  $\bar{h}$  soit également une solution du problème. On peut aussi écrire  $\bar{x} = bx$ , et  $\bar{t} = ct$ . On utilise alors la règle de dérivation de composition de fonctions pour écrire

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = ac \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \quad (10)$$

De même, on a

$$\frac{\partial^2 h^4}{\partial x^2} = a^4 b^2 \frac{\partial^2 \bar{h}^4}{\partial \bar{x}^2} \quad (11)$$

On en déduit que si  $h(x, t)$  est solution de l'équation (5), alors

$$ac \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + a^4 b^2 \frac{\lambda}{4} \frac{\partial^2 \bar{h}^4}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad (12)$$

Alors si on veut que  $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t})$  soit aussi une solution du problème (même équation mais écrite avec des noms de variable différents), il faut que

$$c = a^3 b^2 \quad (13)$$

Cette relation nous donne une première indication de la manière donc on doit transformer les variables pour obtenir une solution générale. Mais cela ne suffit pas, il nous faut deux autres relations pour déterminer les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On peut obtenir une seconde relation en imposant que le volume total du fluide doit être conservé

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) dx = V_0, \quad (14)$$

et ce pour toute valeur de  $t$ . Ainsi, en remplaçant par l'équation (9), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\bar{h}(bx, ct) dx = V_0, \quad (15)$$

et en effectuant le changement de variable  $\bar{x} = bx$ , on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{b} \bar{h}(\bar{x}, ct) d\bar{x} = V_0, \quad (16)$$

Avec ces nouvelles variables, la conservation du volume est vérifiée si

$$a = b. \quad (17)$$

On peut donc affirmer que si  $h(x, t)$  est solution du problème, alors  $a\bar{h}(ax, a^5t)$  est aussi solution. En faisant le choix astucieux  $a = t^{-1/5}$ , cela permet d'écrire  $\bar{h}$  comme fonction d'une seule variable: on a

$$h(x, t) = t^{-1/5} \bar{h}(xt^{-1/5}), \quad (18)$$

où l'on n'a pas réécrit le fait que  $\bar{h}$  dépende de la constante 1 (car n'importe quelle fonction est fonction de 1, il est donc inutile de l'écrire). Ce qui est important en revanche c'est que l'on puisse écrire que la fonction  $\bar{h}$  ne dépend que d'une seule variable

$$\eta = xt^{-1/5}. \quad (19)$$

On appelle  $\eta$  la variable auto-similaire. Cette variable nous donne des indications sur l'évolution physique d'un système. Dans notre cas, la définition de la variable autosimilaire nous renseigne directement sur le fait que le déplacement du front va être régité par une loi du type

$$x \propto t^{1/5}, \quad (20)$$

ce qui correspond à la loi d'échelle que l'on avait trouvée dans la section précédente. On sait aussi que la hauteur du front va s'affaïsser en suivant également une loi du type  $t^{-1/5}$  (qui correspond d'ailleurs bien à la conservation du volume). Pour revenir à la figure 6, on sait maintenant comment transformer les axes pour que le profil soit le même à tout instant. Il ne reste plus qu'à trouver la forme de la fonction  $\bar{h}(\eta)$ . Pour cela, on va chercher l'équation différentielle satisfaite par  $\bar{h}$  : en utilisant l'équation (18) et les règles usuelles de dérivation, on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial t} = t^{-1/5} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{5} t^{-6/5} \bar{h}(\eta) = -\frac{1}{5} t^{-6/5} \frac{\partial \eta \bar{h}}{\partial \eta}. \quad (21)$$

De même, on a

$$\frac{\partial^2 h^4}{\partial x^2} = t^{-6/5} \frac{\partial^2 \bar{h}^4}{\partial \eta^2}. \quad (22)$$

On en déduit donc que  $\bar{h}$  est solution de

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta \bar{h} + \frac{5\lambda}{4} \frac{d\bar{h}^4}{d\eta} \right) = 0, \quad (23)$$

où l'on a remplacé les dérivées partielles par des dérivées droites puisque la fonction  $\bar{h}$  ne dépend que d'une variable  $\eta$ . Pour résoudre cette équation différentielle, la première étape est de constater que le terme entre parenthèses est constant puisque sa dérivée est nulle:

$$\eta \bar{h} + \frac{5\lambda}{4} \frac{d\bar{h}^4}{d\eta} = K. \quad (24)$$

On sait par ailleurs que dans le cas général  $\bar{h}$  est une fonction paire puisque l'étalement peut se faire aussi bien vers la droite que vers la gauche. Cela implique donc

$$\left. \frac{d\bar{h}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0. \quad (25)$$

On en déduit donc que  $K = 0$ . Notons toutefois que notre expérience ne correspond pas exactement à cette configuration puisque le courant de gravité est bloqué par la paroi en  $x = 0$ . La résolution du système requiert alors l'imposition

d'une conditions aux limites en  $x = 0$  qui complique la resolution du système dans ce cas. Nous avons finalement mené le calcul en gardant la condition ci-dessus en étant conscient de cette limite. On doit donc résoudre

$$\eta \bar{h} = -5\lambda \bar{h}^3 \frac{d\bar{h}}{d\eta}, \quad (26)$$

que l'on peut aussi écrire après simplification par  $\bar{h}$

$$d\left(\frac{1}{2}\eta^2\right) = d\left(-\frac{5}{3}\bar{h}^3\right) \quad (27)$$

soit donc une solution du type

$$\bar{h} = \left(h_0^3 - \frac{3}{10\lambda}\eta^2\right)^{1/3}, \quad (28)$$

avec  $h_0$  une constante qui dépend des conditions initiales. On peut aussi ré-écrire cette expression avec les variables physiques  $x$  et  $t$  en utilisant l'équation (18)

$$h(x, t) = \frac{1}{t^{1/5}} \left(h_0^3 - \frac{3}{10\lambda} \frac{x^2}{t^{2/5}}\right)^{1/3}. \quad (29)$$

C'est justement cette fonction que l'on a tracé sur la figure 6 à différents instants pour des valeurs de constantes arbitraires. Notons que si on prend  $t$  très petit, la longueur du front devient également petite alors que la hauteur de front devient arbitrairement grande, le tout en gardant un volume fini (comme une fonction  $\delta$  de Dirac). En fait, on peut montrer que la fonction que l'on a trouvée (Eq. 29) est la fonction de Green (solution fondamentale) qui décrit l'évolution d'une condition initiale correspondant à une impulsion de Dirac. On peut donc en principe décrire l'évolution de n'importe quelle condition initiale en décomposant la condition initiale en une somme d'impulsions. Par analogie avec l'analyse d'une onde, cela revient à faire une décomposition d'un signal dans l'espace de Fourier et propager chaque composante spectrale avec son signal porteur correspondant. Pour conclure ce développement théorique, nous obtenons une loi de déplacement du front conforme à la loi d'échelle et conforme aux résultats expérimentaux avec, en plus une expression de la hauteur du fluide en fonction du temps.

## CONCLUSION

Dans cet article, nous avons mis en évidence l'importance des phénomènes visqueux dans la phase de ralentissement des courants de gravité. Dans ce régime, la position du front avance comme  $t^{1/5}$ . L'évolution est suffisamment lente pour que l'on puisse négliger les variations de vitesse. La dynamique qui s'établit est alors un équilibre entre les forces de gradient de pression et la viscosité. Avec cette simplification, nous avons trouvé une solution auto-similaire qui décrit la forme du front dans l'espace et le temps.

Les solutions auto-similaires jouent un rôle crucial en physique car elles constituent un moyen puissant et élégant de décrire et de comprendre des phénomènes physiques complexes. Le concept d'auto-similarité implique qu'un système ou un processus présente les mêmes solutions à différentes échelles, ce qui permet une représentation mathématique concise. Les solutions auto-similaires révèlent ici des caractéristiques fondamentales des processus physiques qui sont indépendantes de la taille du système, des conditions initiales ou de paramètres spécifiques. Cette universalité est précieuse pour développer des théories générales applicables à toutes les échelles.

## REMERCIEMENTS

Nous sommes très reconnaissants envers toute l'équipe des travaux expérimentaux de l'École Polytechnique (TREX), et en particulier Ali Bozetine et William Gilbert, pour nous avoir permis de réaliser ces expériences.

## BIBLIOGRAPHIE

### References

- [1] J. E. Simpson. *Gravity currents: In the environment and the laboratory*. Cambridge university press, 1999.

- 
- [2] M. Ungarish. *An introduction to gravity currents and intrusions*. CRC Press, 2009.
  - [3] V. De Zotti, S. Boury, P. Husseini, H. Piot-Durand, and C. Rouviere. Des courants de gravité en laboratoire. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 112:725–735, 2018.
  - [4] H. Piot-Durand, N. Dages, A. Gayout, S. Vicent, and S. Boury. Une introduction à la viscosité. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 115:1013–1025, 2021.
  - [5] H. E. Huppert. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *J. Fluid Mech.*, 121:43–58, 1982.
  - [6] A. Volk and C. J. Kähler. Density model for aqueous glycerol solutions. *Exp. Fluids*, 59(5):1–4, 2018.
  - [7] J. W. Rottman and J. E. Simpson. Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel. *J. Fluid Mech.*, 135:95–110, 1983.
  - [8] A.J. Hutchinson, R.J. Gusinow, and M. Grae Worster. The evolution of a viscous gravity current in a confined geometry. *J. Fluid Mech.*, 959, 2023.
  - [9] Pierre-Yves Lagrée. Self similar solutions. <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/SSS.pdf>, 2022.



Thibault Villard  
Etudiant 2eme année  
Ecole polytechnique  
Palaiseau (Essonne)



Ferdinand Peyrin  
Etudiant 2eme année  
Ecole polytechnique  
Palaiseau (Essonne)



Bruno Deremble  
Chargé de recherche CNRS  
Institut des géosciences de l'environnement  
Université Grenoble Alpes  
Grenoble (Isère)